



SKÚMANIE PRVKOV VÝROKOVEJ LOGIKY V KONTEXTE PRÍRODOVEDNÝCH A MATEMATICKÝCH ÚLOH

Investigation of Elements of
Propositional Logic in the Context of
Scientific and Mathematical Problems

KATARÍNA SZARKA, szarkak@ujs.sk, Univerzita J. Selyeho, Komárno, Pedagogická fakulta, Katedra chémie; ZOLTÁN FEHÉR, feherz@ujs.sk, Univerzita J. Selyeho, Komárno, Fakulta Ekonomíe a Informatiky, Katedra matematiky; LADISLAV JARUSKA, jaruskal@ujs.sk, Univerzita J. Selyeho, Komárno, Fakulta Ekonomíe a Informatiky, Katedra matematiky; EVA TÓTHOVÁ TAROVÁ, tothovatarovae@ujs.sk, Univerzita J. Selyeho, Komárno, Pedagogická fakulta, Katedra biológie; ANDREA VARGOVÁ, vargovaa@ujs.sk, Univerzita J. Selyeho, Komárno, Pedagogická fakulta, Katedra chémie

Abstract

Mathematical thinking is an integral part of the skills needed to solve not only problems in science subjects but also in everyday life. Propositional logic as a mathematical discipline forms the basic apparatus for logical reasoning that fundamentally supports scientific thinking.

The current study presents the results of empirical research, which focused on analyses of the solution of tasks containing selected elements of propositional logic formulated in various subject-specific contexts. The focus group of our interest was students in the post-formal cognitive developmental stage. Our research was aimed at finding out how successfully the respondents can solve the given types of tasks; how respondents evaluate the difficulty of the tasks, and whether there are differences in the success rates of solving individual tasks according to the subject-specific context.

Kľúčové slová

matematické myslenie, prírodovedné predmety, výroková logika

Keywords

mathematical thinking, science education, propositional logic

ÚVOD

Pochopenie toho, ako myslíme a ako získame poznatky vždy bolo fascinujúce pre výskum a je aj v súčasnosti skúmané z rôznych aspektov – od genetických aspektov, epistemológie, filozofie myslenia, štruktúry jazyka, teórií vzdelávania až po ďalšie oblasti.

V súčasnosti predmetom debaty odborníkov sú možnosti identifikácie všeobecných aspektov myslenia v rôznych kontextoch.

Sú názory podľa ktorých existuje všeobecná schopnosť myslenia (stotožňujúc to schopnosťou kritického myslenia), ktorú je možné použiť alebo uplatniť v rôznych kontextoch (Ennis, 1989), (Ennis, 1996). Na druhej strane sú prívrženci toho názoru, že myslenie je vždy kontextovo špecifické (McPeck, 1990), myslenie sa uplatňuje ako súčasť situovaného učenia (Lave, Wenger, 1991). Wiliam (2013) dokonca argumentuje s tým, že hocijaká snaha rozvíjania kritického myslenia v jednom predmete nezname-

ná úspešné aplikovanie tejto schopnosti myslenia v inom predmete. Teórie vzdelávania majú tendenciu pozeráť na túto problematiku z hľadiska učenia sa poznania alebo rozvoja vedomostí, teda z genetického hľadiska, na čom v skutočnosti je založená všeobecne uznaná Piagetova teória kognitívneho vývinu.

V kognitívnom vývoji jedinca zásadnú rolu majú myšlienkové operácie. Myšlienkové operácie tvoria základný kognitívny aparát človeka. Základnými piliermi tohto aparátu sú zručnosti: zručnosť usporiadania, kombinatórna, logická zručnosť a zručnosť dokazovania (deduktívnym resp. indukčným spôsobom). Z týchto zručností, zručnosť usporiadania je tá, ktorá sa vyvíja najskôr u detí, v ďalšom sa vyvíja kombinatórna zručnosť a logické myslenie, a naposledy zručnosť dokazovania.

Prečo je dôležité logické myslenie? Dôsledkom absencie resp. nedostatočného logického myslenia žiaci majú problémy s pochopením a interpretáciou textu a vo všeobecnosti so spracovaním informácií, čo sťažuje učenie sa žiakov.

Dlhodobou sa nevenovalo výskumu jazyko-vo-logických operácií, vychádzajúc z presvedčenia, že s tým sa nespoznáva celistvý proces myslenia žiakov a odhalia sa iba nedostatky použitia formálnej logiky (Molnár, 1996).

ÚLOHA MATEMATIKY V ROZVÍJANÍ LOGIKY V PRÍRODOVEDNÝCH PREDMETOCH

Matematika so svojou abstrakciou, exaktnosťou a axiomatickou štruktúrou tvorí nevyčerpatelný systém pravidiel a súvislostí, ktorý ponúka vynikajúce prostredie na mentálne činnosti aj v prípade, že nedisponujeme dostatočnými matematickými poznatkami (Gyarmathy, 2001).

V súčasnosti je už všeobecne akceptovaná téza, že matematika nie je zaradená medzi prírodné vedy (Rada EU, 2018), (ŠPÚ, 2021), čo môžeme jednoducho vysvetliť tým, že matematika neskúma prírodné materiály a objekty, ako ani prírodné javy; má odlišné metódy bádania a skúmania v porovnaní s fyzikou, chémiou resp. biológiou, v ktorých vedných disciplínach sú metódy získavania informácií založené na pozorovaní a experimentovaní (Szarka, Juhász, 2019). Matematika svoje nové poznatky získava axiomaticko-deduktívnym spôsobom, odhaľujúc vlastnosti abstraktných systémov a súvislostí ostatných vedných disciplín ako aj vlastnej vnútornej štruktúry, pričom jej základným pilierom je abstrakcia a konzekventné dodržiavanie príčino-vo-dôsledkových, kauzálnych pravidiel (Szendrei, Szendrei, 2011).

Mylná je predstava, že človek sa narodí s hotovým aparátom matematického myslenia (Vincze, 2003). Kognitívny rozvoj matematického myslenia vyžaduje určitý čas. V ideálnom prípade tento proces možno urýchliť, ak sú aplikované zámerné stratégie rozvíjajúceho hodnotenia, ktoré premietajú rôzne úrovne kritérií a očakávania voči schopnostiam myslenia (Nunes, Csapó, 2011).

Matematika, ako vedná disciplína a ako vyučovacím predmetom, môže formovať myslenie študentov takým spôsobom, aby vedeli aplikovať matematické poznatky aj v iných predmetoch a riešiť každodenné problémy aj mimo školy. Matematika ponúka systematický prístup pre študentov riešiť rôzne problémy a jej aparát je vhodný na modelovanie prírodovedných a spoločenskovedných javov (Csapó, Szendrei, 2011).

Podľa Piageta (1970) matematika by sa mala vyučovať tak, aby podporovala osvojenie logicko-matematických štruktúr a aby výučba matematiky sledovala proces prirodzeného vývinu týchto štruktúr.

Analýzy súčasných učebníc chémie taktiež poukazujú na značnú absenciu týchto elementov v učebniciach (Gašperová, Jenisová, Braniša, 2019), ktoré sú zodpovedné za stimuláciu myšlienkových procesov, kritického myslenia a hodnotenia, teda práve tých zručností, ktoré sú zásadné pre úspešnosť v 21. storočí.

V rámci štúdia analýzy názorov budúcich učiteľov rôznych aprobácií orientované na ich pripravenosť z hľadiska spôsobilosti argumentácie (deduktívnej a induktívnej) a použitie formálnej logiky, ktoré sú zásadnými komponentmi kritického myslenia, študenti uvádzajú, že škola neposkytuje dostatočný priestor ani čas na rozvoj argumentačných schopností študentov (Kosturková, Velmovská, 2019).

VZŤAH MYSLENIA, REČI A JAZYKA

Ovplyvňuje jazyk myslenie? Je zrejme, že áno; preto ho prioritne používame na vyjadrenie našich myšlienok. Vygotskij (1976) o vzťahu medzi jazykom a myslením uvádza, že majú rôzne genetické korene. Vzťah medzi myslením a jazykom sa s pribúdajúcim vekom jednotlivca zosilňuje, pričom v štádiu formálnych operácií sa nerozlučne splynú – egocentrická reč sa u malých detí premieňa na dospievajúcu vnútornú reč, ktorá hrá zásadnú úlohu v myslení.

Podľa Piageta (1970) nie znalosť samotného jazyka, ale štruktúra jeho fungovania, ktorá umožňuje logické myslenie. Ľudské vedomie je nemysliteľné bez myslenia a slova, a bez ich jednoty.

Aj to je zrejme, že jazyk výrazne ovplyvňuje myslenie prostredníctvom komunikácie. Vygotskij (1976) uvádza, že dieťa sa učí nielen každodenné, ale aj vedecké pojmy mimo školy, najmä komunikáciou dospelých.

V každodennom živote prostredníctvom jazyka a reči používame veľa logických štruktúr vytvorených spojkami, ktoré sú zároveň operátory výrokovej logiky. Za logickou štruktúrou reči a písania sa skrýva dôležitý logický obsah. V prípade, že človek nedisponuje základnými aparátom výrokovej logiky a logickým štruktúram nerozumie, nerozumie ani jej obsahu. Výskumná štúdia ukazuje, že jazyk má mierny vplyv na myslenie aj iným spôsobom ako prostredníctvom komunikácie, napríklad matematické uvažovanie, text scény reprodukovateľný z pamäte a orientácia v priestore (Bloom, Keil, 2001). Jazyk skutočne hrá zaujímavú úlohu v tom, ako myslíme, nad rámec svojej úlohy pri komunikácii informácií.

Kognitívny vývin človeka je spojené osvojením jazyka (Clark, 2003) a z prác Piageta a Vygotského (1976) vieme, že síce korene genézy myslenia a jazyka sú odlišné, vo vývine jednotlivca vekom ich prepojenie a vzťah sa zosilní.

U dieťaťa vo svojom druhom roku života sa prelína vývin reči s vývinom myslenia (Vygotskij, 1976). Trojročné dieťa komentuje svoje činy – je to jeho vnútorná reč (Piaget, 1999). Reč sa teda stáva v tomto štádiu nástrojom myslenia, vyjadrená slovami. Pojem „nahlas rozmýšľa“ súvisí taktiež s vnútornou rečou. Vygotskij (1976) poukazuje na to, že u 3–7 ročných detí vnútorná a vonkajšia reč splynú, a myšlienka sa stáva hlavným nositeľom myslenia. Pre nich je typické egocentrické myslenie. Podľa Piageta (1970) rozdiel medzi spôsobom myslenia dospelých a detí je v tom, že dospelý rozmýšľa spoločensky, aj keď je sám, kým dieťa aj keď je v spoločnosti svojich rovesníkov, rozmýšľa egocentricky. Piaget vzťah jazyka a myslenia charakterizuje nasledovne:

- systém pravidiel logického myslenia nie je vrozený, ale vyvíja sa postupne (a pomerne neskoro),
- samotný jazyk nie je striktne viazaný na logiku,
- logická povaha nášho myslenia závisí od vlastností štruktúr myšlienkových operácií, ktoré sa postupne rozvíjajú počas vývinu jednotlivca.

Výskumy ukazujú, že reč (jazyk) má najväčší efekt na rozvoj myslenia v štádiu formálnych operácií (u detí v období 11-tich až 15-tich rokov života) (Csapó, Vidákovich, 1987).

Je zaujímavé, že u detí vývin gramatiky predbehne vývin logiky: výrazy ako napríklad „preto, lebo“, „totiž“, „vtedy, keď“, „ale“ a „naopak“ používa

dieťa skôr, než by spoznal a pochopil ich ozajstný logický význam. Chomsky (2006) uvádza, že pri tvorbe vety z myšlienky, vykonávame postupnosť mentálnych transformácií, avšak štruktúra prirodzeného jazyka nie je založená na štruktúre logiky. Aby sme mohli skúmať logiku nezávisle od jazyka, potrebujeme logiku „očistiť“ od jazykových viazaností. Na takéto účely je optimálna formálna, výroková logika (Chomsky, 2006), ktorá je nezávislá od prirodzeného jazyka, ani od spôsobu a psychologických faktorov interpretácií (Molnár, 1996).

VÝROKOVÁ LOGIKA VO VÝVOJI JEDINCA

Matematická logika formalizuje jazyk, prostredníctvom ktorého formulujeme matematické výroky; stanovuje pravidlá, na základe ktorých z výrokov vieme usudzovať nové výroky; analyzuje formy výrovkových štruktúr a rozvíja metódy dokazovania.

Piaget (1970) poukazuje na to, že náznaky logického myslenia z hľadiska formálnej logiky môžeme nájsť už v predoperačnom vývinovom štádiu dieťaťa (2–7 rokov). Síce dieťa v tomto štádiu ešte nechápe logické operácie, ani pravidlá, ale objavujú sa základné predpoklady formálnej logiky. Štádium konkrétnych operácií je dôležitým mílnikom logického myslenia. Popri typických charakteristikách tohoto štádia ako je logické uvažovanie o objektoch a udalostiach, a pochopenie stálosti počtu, množstva a hmotnosti, objavujú sa aj elementy kombinatorného myslenia, ktoré je prekursorom vývoja formálnej logiky (Molnár, 1996).

Piaget a Inhelder (1984) uvádzajú, že rozoznávanie pojmov „možné“ a „pravdivé“ vedie k vývoji dvojpremenných logických operácií, čo je predpokladom používania formálnej logiky a teda formálneho myslenia. Dieťa sa ľahko a pomerne skoro na-

učí používať spojku „a“, avšak spojku „alebo“ chápe a používa vo vylučovacom zmysle (Nitta, Nagano, 1966). Kým logickou operáciu konjunkcie deti bez problémov disponujú už v štádiu konkrétnych operácií, operáciu disjunkcie pochopia až v štádiu formálnych operácií (Piaget, Inhelder, 1984). Neskôr v štádiu formálnych operácií (v 11-tich rokoch) dieťa sa naučí disponovať a operovať s pojmami „pravdepodobné“ a „možné“ aj v súvislosti symbolickými objektmi. V tomto štádiu logické operácie pre dieťa tvoria ucelený systém. Myslenie má hypoteticko-deduktívny charakter, avšak dedukcia už sa nevzťahuje na reálne objekty, ale aj na pojmy, výroky a tvrdenia. Pre tínedžerov v tomto vývinovom štádiu (formálnych operácií) robia ťažkosti operácie hypoteticko-deduktívnej povahy na verbálnej úrovni, keďže namiesto reálnych objektov majú používať pojmy a výrazy, a vybudovanie „novej“ logiky – systém výrokovvej logiky a hlavne aplikovať to na verbálnej úrovni v rôznych kontextoch je ťažkopádne. Piaget toto štádium nazýva aj obdobím výrokovvej logiky (Piaget, Inhelder, 1984).

Súčasný trendy v rozvíjaní logického myslenia skôr sa orientujú na rozvíjanie jednotlivých elementov operácií podporujúce logické myslenie, než na holistický rozvoj všeobecného logického myslenia (Csapó et al., 2015; Csapó, 2018). Ukazuje sa, že rozvoj zručností logického myslenia je efektívne, ak sa adaptujú vzdelávacie aktivity smerujúce na aplikáciu jednotlivých logických operácií, totiž práve ich správne použitie je predpokladom riadenia myslenia a jeho zdokonaľovania (Molnár, 1996). Je faktom, že je možné logicky myslieť aj bez poznatkov jednotlivých elementov formálnej logiky, ako napríklad vykonať kontrolu, spoznať chyby a vykonať korekcie. Skutočné myslenie totiž sa neriadi presne podľa formálnej logiky, ale jazyk a jeho mechanizmy spolu s poznatkami sú neoddeliteľnou súčasťou myšlienkových procesov.

V súčasnosti sa veľa štúdií zaoberá diagnostikovaním kognitívnych schopností, medzi ktoré patrí aj schopnosť myslenia (Carlsson, Dahl, Öckert, Rooth, 2015; Csapó, Molnár, Nagy, 2014; Csapó, 2018; Pásztor, 2019) a problematikou ich rozvíjania (Veres, 2016).

Štúdie, ktoré pristupujú k mysleniu prostredníctvom logiky prejavujúcej sa v jazyku, vo výrokoch, majú dlhšiu históriu, ktorá siaha do začiatku 20. storočia. Má tri hlavné oblasti, ktoré zhruba zodpovedajú tradičným kapitolám formálnej logiky výroky (Nitta, Nagano, 1966; Braine, 1978), kvantifikátory (Revlis, 1975; Johnson-Laird, 2005) a tranzitívne dedukcie (Huttenlocher, 1968; Clark, 1969).

Sinnott (1998) skúmal logické myslenie piagetovými úlohami na dospelých v postformálnom štádiu kognitívneho vývinu a načrtnol možnosti rozvoja logického myslenia dospelých.

Výskumy kognitívnej psychológie pripúšťajú, že výroková logika nemôže byť tým najvhodnejším modelom ľudského uvažovania. Vo výsledku sa pokúsili navrhnúť alternatívne modely zodpovedajúce výkonu jednotlivcov pri riešení problémov s deduktívnym uvažovaním (Lourenço, 1995).

Všetky tieto alternatívne modely nakoniec tvrdia, že ľudská myseľ má viac než formálne alebo logické pravidlá. Ako Johnson-Laird (1983) poukázal na to, že najpozoruhodnejším problémom je, že ľudia robia chyby. Vyvodia neplatné závery, ktoré by sa nemali vyskytnúť, ak sa dedukcia riadi mentálnou logikou. Základným predpokladom akejkoľvek formálnej logiky je, že dedukcie sú platné na základe ich formy, nie ich obsahu. Ak je v mysli stanovené pravidlo vyvodzovania, malo by platiť bez ohľadu na obsah návrhu (Lourenço, 1995).

Carey (1985) poukazuje nato, že jednoznačné odchýlky myslenia detí a dospelých sú v špecifických poznatkoch – deti zásadne vo všetkých pozorovaných oblastiach myslenia sú nováčikmi, kým dospelí prejavujú odbornosť myslenia. Careyho štúdia načrtnú hlavné oblasti problémov myslenia – a to v induktívnom myslení, epistemológii a filozofie vedy (Carey, 1985). „Charakter logickej kompetencie aj charakter sémantického obsahu ovplyvňujú riešenie úloh“ (Overton et al., 1987).

CIELE A METODIKA VÝSKUMU

Empirický výskum bol založený na analýze riešení úloh obsahujúcich vybrané prvky výrokovkej logiky v kontexte prirodovedných úloh u respondentov v postformálnom štádiu kognitívneho vývinu.

Vo výskume sme formulovali tri výskumné otázky:

1. Akou úspešnosťou riešia respondenti úlohy, ktoré obsahujú základné prvky výrokovkej logiky?
2. Či v úspešnosti riešenia jednotlivých príkladov budú rozdiely vzhľadom na predmetovo špecifický kontext?
3. Ako hodnotia respondenti obťažnosť jednotlivých úloh?

Výskum sme realizovali dostupnou vzorkou (N=53, 44 žien a 9 mužov), zapojením študentov budúcich učiteľov. Respondenti počas svojho stredoškolského štúdia v rámci matematiky sa učili matematickú logiku, výrokovú logiku, ale na univerzite takýto kurz neabsolvovali. S výrokovou logikou sa mohli stretnúť len v rámci matematických predmetov. Z hľadiska vekového rozloženia: 45 respondentov z vekového intervalu 18–25, a 8 respondentov bolo starších ako 25 rokov.

Vzhľadom na súčasnú pandemickú situáciu, výskum sme realizovali online priamou, živou formou, t.j. respondenti mali riešiť úlohy pod pedagogickým dozorom v online spojení, a mali k dispozícii nevyhnutne potrebný časový rámec (15 min.), ktorý sme stanovili na základe pilotného overovania k výskumu indiferentnými osobami.

Ako nástroj empirického výskumu sme vytvorili súbor úloh v kontexte biológie, fyziky, chémie, matematiky a bežného života, z ktorých sme do výskumu implementovali vybraný súbor 15-tich úloh. Výber týchto úloh bol zámerný podľa ich charakteru vzhľadom na vybrané oblasti výrokovej logiky a v ďalšom zoskupené do troch (A, B, C) skupín, podľa charakteru príkladu vzhľadom na oblasť výrokovej logiky. V skupine A boli úlohy, v ktorých sme sa zamerali na monitorovanie pochopenia a správneho používania kvantifikátorov: „každý“, „aspoň“, „práve“, „najviac“ a „ani jeden“. V skupine B boli úlohy, v ktorých sme sledovali, či respondenti spoznajú správnu formuláciu negácie daného výroku. Do skupiny C patrili úlohy založené na tvorbe úsudkov. Pri tvorbe úloh sme vychádzali z presvedčenia, že vybrané prvky tvoria základ z oblasti výrokovej logiky, a ktoré sa najčastejšie používajú pri logickom uvažovaní v prírodovednom vzdelávaní ako aj v bežnom živote. Úlohy boli skonštruované na obmedzenia realizácie online výskumu, preto väčšina z nich bola s výberom odpovedí, až na jednu úlohu zo skupiny C z oblasti biológie:

„Čím nižšiu telesnú hmotnosť má vták, tým viac vajec znáša. Orol má veľkú telesnú hmotnosť, preto.... (dokončite myšlienku?)“

Popri riešení úloh, respondent v rámci jednotlivých skupín mali hodnotiť aj odtiažnosť úloh, na základe 5 stupňovej Likertovej škály (od 1 – „veľmi ľahká úloha“ až 5 – „veľmi ťažká úloha“).

Pri analýze výsledkov sme aplikovali popisnú štatistiku, vykonali sme frekvenčnú analýzu odpovedí, určili sme pomer študentov so správnou odpoveďou. V ďalšom uvádzame ukážky z jednotlivých skupín úloh:

Obr. 1 Ukážka úlohy zo skupiny A

Ukážka úlohy zo skupiny A:

Biológia:

Štyri písmená reťazca RNA sú usporiadané do trojíc, aby vytvorili triplety. Jeden triplet kóduje jednu aminokyselinu. Najmenej koľko aminokyselín môže vytvoriť nižšie uvedený RNA reťazec?

AAUGCACCAAGACGGGAACUUGAUGAAC

- 9 aminokyselín
- 10 aminokyselín
- 8 aminokyselín
- 7 aminokyselín

Obr. 2 Ukážka úlohy zo skupiny B

Ukážka úlohy zo skupiny B:

Matematika:

“Pre každý kosoštvorec je súčet vnútorných uhlov 360 stupňov.” Vyberte správne znenie negácie tvrdenia v úvodzovkách!

- Pre každý kosoštvorec je súčet vnútorných uhlov 359 stupňov.
- Existuje kosoštvorec, ktorého súčet vnútorných uhlov nie je 360 stupňov.
- Pre každý kosoštvorec je súčet vnútorných uhlov najviac 359 stupňov.
- Pre žiadny kosoštvorec nie je súčet vnútorných uhlov 360 stupňov.

Obr. 3 Ukážka úlohy zo skupiny C

Ukážka úlohy zo skupiny C:

Chémia:

Ak pH vodného roztoku je väčší ako 7, roztok je zásaditý. Roztok sprchového gélu má pH=5, roztok sóda bikarbóny má pH=9 a roztok pracieho prášku má pH=12. Na základe týchto informácií, ktoré z nasledujúcich tvrdení je nepravdivé?

- Roztok sprchového gélu a roztok pracieho prášku je zásaditý.
- Roztok sprchového gélu alebo roztok pracieho prášku je zásaditý.
- Roztok sóda bikarbóny a roztok pracieho prášku je zásaditý.
- Roztok sóda bikarbóny alebo roztok pracieho prášku je zásaditý.
- Z troch roztokov aspoň jeden je zásaditý.

VÝSLEDKY VÝSKUMU

Výsledky respondentov prezentujeme podľa jednotlivých skupín úloh (A, B, C).

Výsledky riešenia súboru úloh skupiny A, kde sa monitorovalo pochopenie a správne používanie kvantifikátorov uvádzame v tabuľke 1.

Tab. 1 Výsledky respondentov pri riešení úloh skupiny A

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Početnosť odpovedí respondentov				Správna odpoveď	Percento respondentov so správnou odpoveďou
		a	B	c	D		
A1 – „Prijímačky“	BŽ	53	0	0	0	a	100
A2 – „Výťah“	FYZ	4	34	7	8	b	64
A3 – „Nerovnosť“	MAT	35	6	4	8	a	66
A4 – „Chlór“	CHE	23	16	9	5	a	43
A5 – „RNA“	BIO	38	4	8	3	a	72

Výsledky ukazujú, že respondenti bezproblémovo, všetci (100%) riešili úlohu A1 – „Prijímačky“, kde kvantifikátory boli implementované do kontextu úlohy z bežného života, ktorej znenie bolo nasledovne:

„Študent na prijímacom teste musí získať najmenej 95 bodov z maximálnych 120 bodov. Ktoré z nasledujúcich výsledkov znamená neúspešnosť v teste? a) 94 b) 95 c) 96 d) 120“

V tejto úlohe (A1) sme sledovali správne pochopenie pojmu „najmenej“. Rovnako na tomto výraze bola založená aj úloha z biológie, ktorá mala tiež vysokú 72%-nú úspešnosť.

Najmenej úspešní (43%) však boli v riešení úlohy z chémie, kde sa respondenti stretli nasledujúcou úlohou:

„Chlór vo svojich zlúčeninách najčastejšie sa vyskytuje v nepárnych oxidačných číslach z intervalu –I až VII. Na základe tejto informácie, ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé?

- Chlór vo svojich zlúčeninách sa môže vyskytovať najviac v 5 rôznych oxidačných stavoch.
- Chlór vo svojich zlúčeninách sa môže vyskytovať najviac v 7 rôznych oxidačných stavoch.
- Chlór vo svojich zlúčeninách sa môže vyskytovať aspoň v 5 rôznych oxidačných stavoch.
- Chlór vo svojich zlúčeninách sa môže vyskytovať aspoň v 7 rôznych oxidačných stavoch.“

Touto úlohou sme sledovali správne porozumenie kvantifikátorov v spojitosti výrazu “interval” množiny celých čísel. Analogicky na tento pojem bola formulovaná aj úloha z matematiky (A3 – nerovnosť). Riešenie týchto úloh sa zakladá na správnom pochopení výrazu “najmenej m a najviac n ” pre celé čísla m, n . Môžeme poukázať na fakt, že dve rovnaké úlohy z hľadiska matematickej abstrakcie priniesli odlišné výsledky v závislosti od kontextu.

Úspešnosť respondentov v riešení úloh skupiny A bola nad 50%, až na percentuálnu úspešnosť respondentov v prípade úlohy v chemickom kontexte.

Vo výskumných cieľoch sme vytýčili aj sledovanie postojov respondentov vzhľadom na ich hodnotenie obťažnosti jednotlivých úloh. Výsledky hodnotenia obťažnosti úloh respondentmi tejto skupiny úloh môžeme sledovať v tabuľke 2.

Tab. 2 Výsledky hodnotenia obťažnosti úloh skupiny A

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Hodnotenie obťažnosti úloh					Priemer
		1	2	3	4	5	
A1 – „Prijímačky”	BŽ	38	12	2	1	0	1,4
A2 – „Výťah”	FYZ	21	25	5	2	0	1,8
A3 – „Nerovnosť”	MAT	12	13	20	8	0	2,5
A4 – „Chlór”	CHE	4	6	23	13	7	3,2
A5 – „RNA”	BIO	9	9	15	11	9	3,0

Podľa hodnotení respondentov z úloh skupiny A pre nich najmenej obťažné bolo riešenie úlohy A1 – „Prijímačky”, a najviac náročná na riešenie bola úloha A4 – „Chlór”. Na základe priemerov hodnotení síce úloha A4 bola hodnotená, ako najviac náročná zo skupiny úloh A, avšak hodnotu (3,2) pokladáme za priemernú, a teda mieru obťažnosti tejto úlohy na základe hodnotení respondentov považujeme za priemernú.

Porovnávajúc výsledky úspešnosti riešenia a hodnotenia obťažnosti úloh, pozorujeme určitú súvislosť. Poradie úloh (BŽ, MAT, CHE) v úspešnosti respondentov sa prejavuje aj v poradí ako hodnotili respondenti priemernú obťažnosť daných úloh v tej-

to skupine. Naznačujeme, že tento výskum v tejto fáze sa neorientoval na hľadanie súvislostí. Na naplnenie takýchto výskumných úloh, získané dáta budú podrobené ďalším štatistickým analýzám. Úlohu v biologickom kontexte respondenti hodnotili ako viac obťažnú oproti úlohe z fyziky, napriek tomu, pozorujeme vyššiu percentuálnu úspešnosť respondentov v prípade úlohy z oblasti biológie ako z fyziky.

Druhý súbor úloh (skupiny B) tvorili úlohy, v ktorých sme sledovali, či respondenti spoznajú správnu formuláciu negácie daného výroku. Výsledky odpovedí respondentov je možné sledovať v tabuľke 3.

Tab. 3 Výsledky respondentov pri riešení úloh skupiny B

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Početnosť odpovedí respondentov					Správna odpoveď	Percento respondentov so správnou odpoveďou
		a	b	c	d	e		
B1 – „Termoreceptory“	BIO	3	23	24	3	–	b	43
B2 – „Praha“	BŽ	12	30	2	9	–	d	17
B3 – „Vyparovanie“	FYZ	14	13	20	6	–	c	38
B4 – „Periodická tabuľka“	CHE	9	17	4	15	8	d	28
B5 – „Rombus“	MAT	4	22	4	23	–	b	41

Je zaujímavé, že zo skupiny úloh A 100%-nou úspešnosťou riešili respondenti úlohu z bežného života. Teda pochopenie kvantifikátorov a použitie v bežnej reči je u nich zaužívané, avšak negáciou výrokov obsahujúce kvantifikátory mali respondenti práve v prípade úlohy v kontexte bežného života (B2 – „Praha“). V tejto úlohe respondenti mali vybrať správnu formuláciu negácie výroku „V Prahe som bol zatiaľ aspoň 6-krát“.

Negácia výrokov obsahujúcich všeobecný a existenčný kvantifikátor, ako aj kvantifikátory s údajom o počte (každý prvok, práve n , aspoň n , najviac n prvkov) často spôsobuje problémy študentom. Tieto pojmy nie sú pre nich jednoznačné, často v bežnom živote majú inú interpretáciu. Typický príklad tejto nesprávnej/mylnej interpretácie je úloha B2-Praha. V tejto úlohe pre výraz „aspoň 6-krát“ viac ako polovica študentov zvolil distraktor v podobe „najviac 6-krát“, namiesto správnej negácie „najviac 5-krát“.

Respondenti dosiahli približne rovnakú nízku úspešnosť v úlohách s negáciou všeobecného alebo existenčného kvantifikátora (úlohy z biológie, matematiky, fyziky).

Porovnávajúc výsledky riešenia úloh skupiny B vzhľadom na predmetovo-špecifický kontext, opäť pozorujeme nízku úspešnosť (28%) respondentov v riešení úlohy formulovanej z chemickej oblasti (B4 – „Periodická tabuľka“). Úspešnosť respondentov v riešení úloh tejto skupiny bola pod 50%, bez ohľadu na kontext úlohy.

Výsledky hodnotenia obťažnosti úloh skupiny B posúdené s respondentmi uvádzame v tabuľke 4.

Tab. 4 Výsledky hodnotenia obťažnosti úloh skupiny B

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Hodnotenie obťažnosti úloh					Priemer
		1	2	3	4	5	
B1 – „Termoreceptory“	BIO	11	9	19	11	3	2,7
B2 – „Praha“	BŽ	2	15	19	14	3	3,0
B3 – „Vyparovanie“	FYZ	6	5	19	18	5	3,2
B4 – „Periodická tabuľka“	CHE	2	6	15	18	12	3,6
B5 – „Rombus“	MAT	7	9	18	13	6	3,0

Na základe analýzy výsledkov úspešnosti a hodnotenia obťažnosti úloh skupiny B, môžeme konštatovať, že iba v prípade úlohy negácie výroku v biologickom kontexte (B1 – „Termoreceptory“) pozorujeme jednoznačný korešpondujúci vzťah, t.j. túto úlohu hodnotili respondenti ako v priemere najľahšiu (2,7) zo skupiny B, čo sa prejavuje aj v najvyššej hodnote percentuálnej úspešnosti respondentov (43%) porovnávajúc úspešnosť respondentov v riešení ostatných úloh zo skupiny B.

V prípade úlohy z bežného života (B2 – „Praha“), ako sme na to už vyššie poukázali, úspešnosť respondentov v riešení súboru úloh B preukázali najhorší výkon (17%), avšak obťažnosť danej úlohy respondenti hodnotili ako priemernú (3,0). Rovnako priemerné hodnotenie (3,0) dostala aj úloha výrokovkej logiky v matematickom kontexte (B5 – „Rombus“), napriek tomu úspešnosť respondentov dosiahla druhú najvyššiu percentuálnu hodnotu (41%).

Na základe obťažnosti úloh v priemere hodnotili ako najťažšiu (3,6) úlohu negácie výroku s kvantifikátorom formulovanej v chemickom kontexte (B4 – „Periodická tabuľka“), čo korešponduje aj s nízkou percentuálnou úspešnosťou respondentov (28%) v riešení tejto úlohy.

Analyzujúc trend hodnotenia obťažnosti a úspešnosť riešenia respondentov, poradie obťažnosti úloh (od ľahkej po ťažkú úlohu podľa hodnotenia respondentov) v predmetovo-špecifických kontextoch (BIO, MAT, FYZ, CHE) je rovnaké vzhľadom na úspešnosť respondentov v riešení týchto úloh.

Ďalší súbor úloh tvorila skupina C, kde respondenti v rôznych predmetovo-špecifických kontextoch ako aj v každodennom kontexte, ako aj v predchádzajúcich skupín úloh mali riešiť úlohy, tentokrát založené na tvorbe úsudkov. V tejto skupine úloh sa objavila aj úloha (BIO) otvoreného charakteru.

Výsledky odpovedí respondentov uvádzame v tabuľke 5.

Tab. 5 Výsledky respondentov pri riešení úloh skupiny C

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Početnosť odpovedí respondentov					Správna odpoveď	Percento respondentov so správnou odpoveďou
		a	b	c	D	e		
C1 – „pH“	CHE	28	3	8	10	3	a	53
C2 – „deliteľnosť“	MAT	15	4	5	29	–	d	55
C3 – „šírenie zvuku“	FYZ	1	8	42	2	–	c	79
C4 – „Tomí“	BŽ	1	0	52	0	–	c	98
		Správna odpoveď		Nesprávna odpoveď		Neuvádza odpoveď		
C5 – „orol“	BIO	45		4		4		85

Výsledky ukazujú, že najúspešnejší (98%) boli respondenti v riešení úlohy z bežného života (C4 – „Tomí“), teda vo výbere správnej formulácie úsudku v každodennom kontexte, a opäť najväčší problém mali v riešení daného typu úlohy v chemickom kontexte (C1 – „pH“), kde respondenti dosiahli najnižšiu percentuálnu úspešnosť (53%). Úspešnosť respondentov v riešení úloh tejto skupiny bola nad 50%, bez ohľadu na kontext úlohy.

Tvorba úsudkov v tvare „ak platí A potom platí B“, je často používaným logickým výrazom aj v prírodovednom myslení/uvažovaní, preto zrejme tieto

úlohy zo skupiny C mali všeobecne vyššiu úspešnosť. V prípade každej úlohy je početnosť správnych odpovedí najvyššia, ale ako vidíme v tabuľke 5 jednotlivé distraktory výrazne znížili úspešnosť v úlohe C1 (chémia) aj C2 (matematika).

Rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch skupiny úloh, respondenti hodnotili obťažnosť riešenia úloh aj skupiny úloh C. Výsledky hodnotenia respondentov uvádzame v tabuľke 6.

Tab. 6 Výsledky hodnotenia obťažnosti úloh skupiny B

Úlohy	Oblasti kontextu úloh	Hodnotenie obťažnosti úloh					Priemer
		1	2	3	4	5	
C1 – „pH“	CHE	6	17	17	7	6	2,8
C2 – „deliteľnosť“	MAT	9	12	22	6	4	2,7
C3 – „šírenie zvuku“	FYZ	11	11	24	5	2	2,5
C4 – „Tomí“	BŽ	30	10	10	1	2	1,8
C5 – „oroľ“	BIO	19	14	16	2	2	2,1

Pri analýze výsledkov úloh skupiny C vzhľadom na úspešnosť respondentov a hodnotenia obťažnosti úloh, pozorujeme rovnaké poradie predmetov. To znamená, že percentuálna úspešnosť respondentov v riešení úloh správnej formulácie úsudku v jednotlivých predmetovo-špecifických kontextoch (vrátane aj bežného života) jednoznačne korešponduje s výsledkami, v akom poradí respondenti hodnotili obťažnosť úloh z jednotlivých oblastí.

Na záver uvádzame v tabuľke 7 výsledky pre skupiny úloh orientované na vybrané oblasti výrokovkej logiky vzhľadom na úspešnosť respondentov a výsledky, ako respondenti hodnotili obťažnosť jednotlivých skupín úloh.

Tab. 7 Porovnanie výsledkov jednotlivých skupín úloh

	Skupina úloh		
	A	B	C
Priemerný percentuálny podiel respondentov so správnou odpoveďou	69,0%	33,4%	74,0%
Priemerné hodnotenia obťažnosti skupiny úloh	2,37	3,12	2,39

ZÁVER

Na základe výsledkov môžeme konštatovať, že zo skúmaných prvkov výrokovej logiky respondenti najmenej úspešní boli v úlohách, kde mali vybrať správnu formuláciu negácie jednoduchých výrokov s kvantifikátormi. Výsledky ukazujú, že respondenti najviac úspešní boli v úlohách, kde mali vybrať správne formulácie úsudkov na východiskový výrok.

Csapó a Molnár (2012), vo svojej štúdií poukazujú na to, že na analýzu spôsobilosti myslenia vždy potrebujeme určitý kontext. V našom empirickom výskume sme skúmali ako respondenti riešia úlohy na vybrané elementy výrokovej logiky v rôznych predmetových kontextoch. Výsledky ukazujú na značné rozdiely úspešnosti respondentov v závislosti od predmetovo-špecifického kontextu úloh. Vzhľadom na predmetový kontext respondenti najúspešnejší boli v dvoch oblastiach úloh výrokovej logiky (skupina úloh A a C) s kontextom z bežného života, čo sme aj očakávali, veď základy výrokovej logiky v stredoškolskej matematike sa sprístupňuje prostredníctvom kontextových formulácií z bežného

života. Teda pochopenie kvantifikátorov a použitie v bežnej reči ako aj správna formulácia úsudkov je u nich zaužívané, avšak negáciou výrokov obsahujúcich kvantifikátory (skupiny úloh B) mali respondenti ťažkosti práve v prípade úlohy v kontexte bežného života. Respondenti v dvoch skupinách úloh (A a C) v priemere preukázali jednoznačne najhorší výkon s chemickým kontextom. V riešení úloh orientované na správnu formuláciu negácií výrokov (skupina úloh B) úspešnosť respondentov v úlohe s chemickým kontextom bol na predposlednom mieste.

Výsledky hodnotenia študentov ukazujú, že pre nich najnáročnejšie boli úlohy orientované na negáciu elementárnych výrokov s kvantifikátormi (úlohy skupiny B). Podľa hodnotenia respondentov priemerná miera obťažnosti zvyšných dvoch skupín úloh (úlohy skupiny A a C) bola približne rovnaká. Na základe porovnávania priemernej úspešnosti súboru úloh a priemernej miery obťažnosti úloh skupín sledujeme obdobný trend, teda môžeme konštatovať, že priemerné výsledky hodnotenia obťažnosti skupiny úloh sa odzrkadľuje aj vo výsledkoch úspešnosti ich riešenia s respondentmi.

Podakovanie Tento príspevok vznikol s finančnou podporou projektu KEGA č. 004UPJŠ-4/2020 „Tvorba, implementácia a overovanie efektívnosti digitálnej knižnice s nástrojmi formatívneho hodnotenia pre prírodovedné predmety, matematiku a informatiku na základnej škole“ VEGA č. 1/0663/19 „Analýza prírodovedného a matematického vzdelávania na stredných školách a inovácia obsahu odborových didaktík“.

Literatúra

- BLOOM, P., & KEIL, F. C. (2001). Thinking through language. *Mind and language*, 16(4), s. 351–367. <https://doi.org/10.1111/1468-0017.00175>
- BRAINE, M. D. 1978. On the relation between the natural logic of reasoning and standard logic. *Psychological review*. 1978, Zv. 85, 1. <https://doi.org/10.1037/0033-295X.85.1.1>
- CAREY, S. (1985). Are children fundamentally different kinds of thinkers and learners than adults? In Chipman, S.F., Segal, J.W., & Glaser, R. (Eds.) *Thinking and Learning Skills: Volume 2: Research and Open Questions* (s. 485 – 517). New York and London: Routledge
- CLARK, H. H. 1969. Linguistic processes in deductive reasoning. *Psychological review*. 1969, Zv. 76, 4. <https://doi.org/10.1037/h0027578>

- CLARK, E. V. 2003. Languages and representations. In Gentner, D. & S. Goldin-Meadow (Eds.). *Language in mind: Advances in the study of language and thought*. London: A Bradford Book, 2003, s. 17–24.
- CARLSSON, M., DAHL, G. B., ÖCKERT, B., & ROTH, D. O. (2015). The effect of schooling on cognitive skills. *Review of Economics and Statistics*, 97(3), s. 533–547. https://doi.org/10.1162/REST_a_00501
- CHOMSKY, N. (2006). *Language and mind*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511791222>
- CSAPÓ B., CSÍKOS Cs., & MOLNÁR, Gy. (2015). *A természettudományi tudás online diagnosztikus értékelésének tartalmi keretei [Obsahový rámeček pre online diagnostické hodnotenie prírodovedných poznatkov]*. Budapest: Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet.
- CSAPÓ, B. (2018). Diagnosztikus értékelés és differenciált fejlesztés: új eredmények és perspektívák [Diagnostické hodnotenie a diferencovaný rozvoj: nové výsledky a perspektívy]. In: Kónyáné Tóth Mária és Molnár Csaba (szerk.): *Köznevelés, szakképzés*, s. 215–225.
- CSAPÓ, B., & SZENDREI, M. (2011). Bevezetés. In Csapó, B. & Szendrei, M. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez [Obsahový rámeček pre diagnostické hodnotenie matematiky]* (s. 9 – 15). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- CSAPÓ, B., & VIDÁKOVICH, T. (1987). A nyelvi-logikai műveletrendszer fejlettsége 14 éves korban [Úroveň systému jazykovo-logických operácií u 14 ročných detí]. *Pszichológia*, 7(4), s. 521–544.
- CSAPÓ, B., MOLNÁR, G., & NAGY, J. (2014). Computer-based assessment of school readiness and early reasoning. *Journal of educational psychology*, 106(3), s. 639. <https://doi.org/10.1037/a0035756>
- CSAPÓ, B. & MOLNÁR, Gy. (2012). *Gondolkodási készségek és képességek fejlődésének mérése [Meranie rozvoja zručností a schopností myslenia]*. In B. Csapó, *Mérlegen a magyar iskola* (s. 407– 439). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó. Cit. 14. 01 2019. Dostupné na Internetu: <https://rb.gy/cxvqtu>
- ENNIS, R. H. (1989). Critical thinking and subject specificity: Clarification and needed research. *Educational researcher*, 18(3), s. 4–10. <https://doi.org/10.3102/0013189X018003004>
- ENNIS, R. H. (1996). Critical thinking dispositions: Their nature and assessability. *Informal logic*, 18(2). <https://doi.org/10.22329/il.v18i2.2378>
- GAŠPEROVÁ, E., JENISOVÁ, Z., & BRANIŠA, J. (2019). Didaktická vybavenosť aktuálnych učebníc chémie. In Duchovičová, J., Hošová, D., & Koleňáková, R.Š. (Eds.). *Inovatívne trendy v odborových didaktikách: Prepojenie teórie a praxe výučbových stratégií kritického a tvorivého myslenia* (Zborník štúdií z medzinárodnej vedeckej konferencie) (s. 301 – 307). Nitra: Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre.
- GYARMATHY, É. (2001). *A tehetségről [O talente]*. Miskolc: Arany János Tehetséggondozó Program Intézményeinek Egyesülete.
- HUTTENLOCHER, J. (1968). Constructing spatial images: A strategy in reasoning. *Psychological review*. 1968, Zv. 75, 6. <https://doi.org/10.1037/h0026748>
- JOHNSON-LAIRD, P. 1983. *Mental models: Toward a cognitive science of language, inference and consciousness (No.6)*. Cambridge MA: Harvard University Press.
- JOHNSON-LAIRD, P. N. 2005. Mental models and thought. In Holyoak, K.J. & Morrison, R.G. (Eds.). *The Cambridge handbook of thinking and reasoning*. s.l. : Cambridge University Press, 2005, s. 185–208.
- KOSTURKOVÁ, M., & VELMOVSKÁ, K. (2019). Názory študentov učiteľstva na rozvoj ich argumentačných schopností. *Edukácia*, 3(1), s. 110 – 118.
- LAVE, J., & WENGER, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge university press. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355>

- LOURENÇO, O. (1995). Piaget's logic of meanings and conditional reasoning in adolescents and adults. *Archives de Psychologie*, 63(246), s. 187–203.
- MCPECK, J. E. (1990). Critical thinking and subject specificity: A reply to Ennis. *Educational researcher*, 19(4), s. 10–12. <https://doi.org/10.3102/0013189X019004010>
- MOLNÁR, I. (1996). Nyelvi-logikai képességfejlesztés a 8. osztályos kémia tanításban [Rozvíjanie jazykovo-logických schopností u žiakov 8. ročníka v rámci vyučovani chémie]. Dissertation theses. Szeged: JATE Bölcsész tudományi Kar.
- NITTA, N., & NAGANO, S. (1966). Basic logical operations and their verbal expressions: Child's conception of logical sum and product. *Research Bulletin of the National Institute for Educational Research, Tokyo*, 7, 1–27.
- NUNES, T., & CSAPÓ, B. (2011). A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése [Rozvíjanie a hodnotenie matematického myslenia]. In Csapó, B. & Szendrei, M. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez* (s. 17 – 57). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- PÁSZTOR, A. (2019). Induktív és kombinatív gondolkodás fejlettségének online vizsgálata egyetemi tanulmányaikat kezdő hallgatók körében [Online analýza induktívneho a kombinatívneho myslenia u študentov univerzít]. *Iskolakultúra*, 29(1), s. 42–54. <https://doi.org/10.14232/ISKKULT.2019.1.42>
- PIAGET, J. (1970). *Válogatott tanulmányok [Vybrané štúdiá]*. Budapest: Gondolat Kiadó.
- PIAGET, J. (1999). *Szimbólumképzés a gyermekkorban – Utazás, játék és álom; A kép és ábrázolás [Tvorba symbolov v detstve – Cestovanie, hra a sen; Obraz a reprezentácia]*. Kairos Kiadó Kft.
- PIAGET, J., INHELDER, B. (1984). *A gyermek logikájától az ifjú logikájáig – A formális műveleti struktúrák kialakulása [The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence]*. Budapest: Akadémiai Kiadó.
- RADA EÚ. (2018). *Odporúčanie Rady z 22. mája 2018 o klúčových kompetenciách pre celoživotné vzdelávanie*. Úradný vestník Európskej únie. Dostupný na [https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604\(01\)&from=en](https://eur-lex.europa.eu/legal-content/SK/TXT/PDF/?uri=CELEX:32018H0604(01)&from=en)
- REVLIS, R. (1975). Two models of syllogistic reasoning: Feature selection and conversion. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*. 1975, Zv. 14, 2, s. 180–195. [https://doi.org/10.1016/S0022-5371\(75\)80064-8](https://doi.org/10.1016/S0022-5371(75)80064-8)
- SINNOTT, J. (1998). *The development of logic in adulthood: Postformal thought and its applications*. Boston, MA: Springer Science & Business Media.
- ŠPŮ. (2020). *Inovovaný štátny vzdelávací program*. Dostupný na <https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/>
- SZARKA, K. & JUHÁSZ, Gy. (2019). Rozvoj matematického myslenia v chemickom vzdelávaní. *Biológia, ekológia, chémia: časopis pre školy*, 23(3), s. 9–16.
- SZENDREI, J. & SZENDREI, M. (2011). A matematika tanításának és felmérésének tudományos és tantervi szempontjai [Vedecké a kurikulárne aspekty vyučovania a hodnotenia matematiky]. In Csapó, B. & Szendrei, M. *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez* (s. 99–139). Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.
- VERES, G. (2016). Gondolkodás-és képességfejlesztés: Kihívások és megoldások a SAILS projektben [Myslenie a rozvoj zručností: Výzvy a riešenia v projekte SAILS]. *Iskolakultúra*, 26(3), s. 43–56. <https://doi.org/10.17543/ISKKULT.2016.3.43>
- VIYGOTSKIJ, L. S. (1976). *Myšlení a řeč*. Praha: SPN.
- VINCZE, S. (2003). A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával [Skúmanie zložiek matematických zručností a ich vzťahu k inteligencii]. *Magyar Pedagógia*, 103(2), s. 229–261.
- WILIAM, D. (2013). *Principled curriculum design*. SSAT (The Schools Network) Ltd. Dostupné na <http://www.tauntonteachingalliance.co.uk/wp-content/uploads/2016/09/Dylan-Wiliam-Principled-curriculum-design.pdf>